UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 43-58

www.fisem.org/web/union

Generalizaciones del Concepto de Métrica

Otilio B. Mederos Anoceto, Rita A. Roldán Inguanzo

Fecha de recepción: 17/07/2012
Fecha de aceptación: 7/08/2013

Resumen	En este trabajo se define y se aplica el concepto de criterio de generalización de un concepto eliminando propiedades de su contenido. Se obtienen 16 generalizaciones del concepto de métrica. Se construyen los mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades, para diferentes niveles de generalización correspondientes al criterio. Se construye, además, una clasificación para cada una de las generalizaciones. **Palabras clave**: métrica, generalizaciones.
Abstract	This paper defines and applies the concept of generalization criterion of a concept, by eliminating of properties of its content. 16 generalizations of the concept of metric are obtained. There are constructed maps of extensions, symbolic maps, and maps of cardinalities for different levels of generalization for the criterion. It's constructed also a classification for each of the generalizations. **Keywords**: metric, generalizations.
Resumo	Neste artigo definese e aplicase o conceito de um critério de generalização dum conceito eliminando propriedades de seu conteúdo. São obtidas 16 generalizações do conceito de métrica. São construídos mapas de extensões, simbólicos e de cardinalidades para diferentes níveis de generalização correpondentes ao critério. É construída também uma classificação para cada uma das generalizações. **Palavras-chave**: métrica, generalizações.

1. Introducción

Generalizar un concepto pudiera constituir una de las vías para comprenderlo mejor. Sin embargo, lo más común en la enseñanza de la Matemática es definir los diferentes conceptos, dejando las generalizaciones a los investigadores e interesados. En este trabajo se ejemplifica la generalización a partir del concepto de métrica, eliminando propiedades de su contenido. Se presentan 16 generalizaciones del concepto de métrica, con sus correspondientes clasificaciones y mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades.

Las tres primeras secciones del trabajo constituyen fundamentos teóricos de la cuarta sección, en donde se presenta los resultados novedosos. La primera sección se dedica a exponer algunos de los resultados recientes de la Psicología Educativa relativos a los procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje, y a justificar desde el punto de vista del aprendizaje cognitivo la utilización de mapas como técnicas de aprendizaje. En la segunda sección se fundamenta, desde el punto de vista de la lógica formal, una definición del concepto de concepto. En la tercera sección se hace referencia, por una parte a la generalidad de los mapas conceptuales como técnica de aprendizaje de conocimientos de cualquier asignatura y, por otra, a proponer mapas de otros tipos, más apropiados para representar relaciones significativas entre conceptos matemáticos. Se definen en esta sección los conceptos de mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos y de cardinalidades.

En la primera parte de la cuarta sección se presentan definiciones de la generalización restringida al proceso de formación conceptual, y como operación conceptual, en su doble carácter de proceso y resultado. En el epígrafe 5.2 se construyen 16 generalizaciones del concepto de métrica que se obtienen aplicando un adecuado criterio de generalización en el que intervienen las cuatro generalizaciones construidas por (Mederos y Roldán, 2010, pp. 29-39).

2. Sobre el proceso de aprendizaje

La Psicología Educativa, en los últimos años, ha tenido entre sus tareas fundamentales el estudio de los subprocesos del proceso complejo de aprendizaje. La determinación de estos subprocesos ha permitido profundizar en el aprendizaje significativo y se ha contrapuesto al objetivo casi exclusivo del aprendizaje tradicional, los contenidos.

Los resultados del aprendizaje dependen de los procesos sugeridos por el profesor y puestos en marcha por el estudiante mientras aprende. Surge entonces la pregunta ¿cuántos y cuáles son los procesos de aprendizaje? Según (Beltrán, 1998, p. 40-41), varios autores dieron respuesta a esta pregunta a finales del siglo pasado, presentando diferentes conjuntos de subprocesos, entre ellos Gagne, Cook, Thomas y Shuell. Los subprocesos presentados por Beltrán en el libro citado son los de sensibilización, atención, adquisición, personificación, recuperación, transfer y evaluación.

Una vez establecidos los subprocesos que forman el proceso complejo de aprendizaje, hay que dar respuesta a la pregunta ¿cómo se ponen en marcha los procesos de aprendizaje?

> "Los procesos de aprendizaje pueden llevarse a cabo por medio de actividades mentales muy diversas, dando lugar a estrategias más o menos eficaces que movilizan dichos procesos." (Beltrán, 1998, p. 47).

Las estrategias de aprendizaje son operaciones o actividades mentales que facilitan y desarrollan los diversos procesos del aprendizaje escolar. Por medio de las estrategias, los estudiantes pueden procesar, organizar, retener y recuperar material informativo que tienen que aprender, a la vez que planifican, regulan y evalúan esos mismos procesos en función del objetivo previamente trazado o exigido por las demandas de la tarea.

En el subproceso de adquisición (Beltrán, 1998, p.78), intervienen varios subprocesos. Uno de ellos es el de comprensión, que es facilitado por estrategias de selección, de organización y de metacognición. Una vez que se han identificado y separado los elementos informativos relevantes de los no relevantes mediante la estrategia de selección, se deben ordenar estos elementos en un todo coherente y significativo por medio de la estrategia de organización. La estrategia de elaboración también tiene como objetivo articular elementos informativos relevantes en un todo significativo y coherente.

La diferencia esencial entre las estrategias de organización y elaboración es que la primera establece conexiones internas entre los datos informativos relevantes, y la segunda crea conexiones externas entre la nueva información y la información ya almacenada en la memoria. Según (Pérez, 1990, p. 45) cuantas más conexiones se establecen entre los datos informativos, mejor se aprende y se recuerda la información. (Yussen y otros, 1974, p. 97) demostraron que se produce un aumento de recuerdo a medida que aumenta el índice de organización de los contenidos.

Para poner en marcha cada una de estas estrategias es necesario aplicar diferentes técnicas. Por ejemplo, para la estrategia de organización se reportan las técnicas siguientes: red semántica, análisis de contenido estructural, árbol organizado, mapa semántico, mapa conceptual, heurístico, conocimiento como diseño.

Las técnicas para cada una de las estrategias de los diferentes subprocesos de aprendizaje han sido determinadas para el aprendizaje de contenidos en general, y no para contenidos matemáticos particulares y mucho menos para contenidos matemáticos de la educación universitaria.

Uno de los objetivos específicos de este trabajo es presentar nuevas técnicas, *mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades*, para que los estudiantes desarrollen la estrategia de organización relativas a siete procesos de generalización del concepto de métrica con sus correspondientes procesos de clasificación, que les permitan participar en el subproceso de adquisición de conocimientos y, particularmente, en el de comprensión.

3. Sobre el concepto de concepto

Un concepto es un modelo mental generalizado de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. Se denominan propiedades esenciales de un concepto a características de los objetos modelados en el mismo, cada una de las cuales es necesaria para distinguir los objetos que corresponden al concepto de los demás. El concepto de objeto se toma como primario; es decir, sin definición.

Todo concepto posee siempre dos características lógicas: el *contenido* y la *extensión*. Un conjunto de propiedades esenciales de los objetos modelados en el concepto, que sea suficiente para distinguir los nuevos objetos del concepto, constituye su contenido. El contenido es un factor indispensable de todo concepto, por lo que no puede existir un concepto carente de contenido, en el que consecuentemente no se conciba propiedad alguna. La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de modelos de los objetos que dicho concepto abarca. La extensión es una característica lógica del concepto tan indispensable como su contenido. Se entiende por modelo del objeto la colección de sus registros de representaciones.

En este trabajo se indica el concepto por el par (E,C), o simplemente por E cuando no haya dudas; donde E denota a la extensión del concepto y C a su contenido. Pueden encontrarse diferentes colecciones C de propiedades que sólo cumplen los elementos de E. Es usual indicar el contenido por la colección de propiedades $\{P_i\}_{i\in I}$ que se haya escogido, donde I es un conjunto de índices. Ello indica que los objetos que pertenecen a la extensión del concepto cumplen simultáneamente todas esas propiedades, o lo que es lo mismo, cumplen la propiedad única $\underset{i \in I}{\wedge} P_i$.

4. Sobre los mapas conceptuales

Según (Beltrán, 1998, p.155)

> "…el significado del aprendizaje se percibe más fácilmente cuando los contenidos del aprendizaje están organizados, poseen una estructura y están relacionados entre sí. Ningún instrumento es mejor que los mapas conceptuales para lograr este objetivo".

En una entrevista concedida especialmente a EDUTEKA, (Novak, 2006, p.1) expresó

> "Los mapas conceptuales, como los conocemos y los describimos, se desarrollaron en 1972 dentro de un proyecto de investigación a mi cargo en la Universidad de Cornell. Este proyecto se enfocó en hacer seguimiento a estudiantes de educación básica desde el primer grado hasta el grado 11◦, para estudiar de qué manera la enseñanza en los conceptos básicos de ciencias en los dos primeros grados escolares influenciaría el aprendizaje posterior en ciencias y, además, comparar estudiantes que recibieran esa instrucción temprana con los que no la recibieran."

Para (Jones y otros, 1987) citado por (Beltrán, 1998, p. 155), se distinguen tres clases de mapas conceptuales: mapas araña, mapas encadenados y mapas jerárquicos. Según (Hernández, 1990) citado por (Beltrán, 1998, p. 157), los mapas se han usado con una gran variedad de contenidos y grupos de edad, y con dos medios: los textos y los ordenadores. El contenido ha incluido disciplinas como ecología, genética, economía familiar, geología, etc. Y los grupos de edad llegan desde los alumnos de primaria a la universidad.

(Beltrán, 1998, p. 162-168) cita una gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre los mapas conceptuales. Entre ellas, consideramos las investigaciones que han contribuido a determinar diferentes clases de relaciones en los mapas conceptuales (Armbruster, 1994), (Huang, 1988) y (McAllese, 1998).

> "Las relaciones son muy variadas, entre las cuales destacamos estas nueve: A es una instancia de B (por ejemplo, tipo de, clase de, y por ejemplo). La segunda, A es una propiedad de B (un rasgo de, es una característica de, se llama y es definido como). La tercera, A es idéntico a B (es idéntico a y es lo mismo que). La cuarta, A es semejante a B (es como, es semejante a, de manera semejante). La quinta, A no es semejante a B (es diferente, en contraste). La sexta, A es mayor que menor que). La séptima, A ocurre antes que B (y después, antes,…). La octava, A causa a B (causa, produce, porque, consiguientemente). La novena, A permite a B (permite, requiere)."

Tony Buzan le llamó mapa mental a una técnica que ideó para la toma de notas, la cual ha sido desarrollada por (Brinkmann, 2003, p. 96-101) para su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En la matemática disciplinar se utilizan representaciones visuales de las relaciones entre las extensiones de ciertas clases de conceptos. (Steen y Seebach, 1995, p. 15-24) hacen uso frecuente de este tipo de representaciones; por ejemplo, las figuras de la 1 a la 6 en las páginas 15,16, 21, 22, 23 y 24 respectivamente.

4.1. Mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades

Otro objetivo específico del trabajo es ampliar los significados conocidos del concepto de mapa conceptual, al proponer y utilizar mapas de otros tipos para representar relaciones entre conceptos matemáticos y contribuir de esa manera al aprendizaje significativo de la Matemática.

Se introducen y utilizan los conceptos de mapa de extensiones, mapa simbólico y mapas de cardinalidades, y se considera un mapa conceptual matemático, como un conjunto de mapas entre los que se encuentran los tres anteriores, el cual tiene gran utilidad para la representación de relaciones exactas entre conceptos matemáticos tanto en el trabajo escolar como disciplinar. Por un problema de espacio solo tratamos exhaustivamente el concepto de mapa de extensiones.

Un *mapa de extensiones* es un diagrama (una imagen visual) en el que se representan gráficamente las extensiones de varios conceptos que se han definido a partir de un mismo concepto; o entre los que existe alguna relación de dependencia (por ejemplo, son generalizaciones de un mismo concepto).

Un *mapa de proposiciones* es un conjunto de proposiciones, cada una de las cuales se obtiene utilizando los contenidos correspondientes a las extensiones del mapa visual y el aparato lógico deductivo. La construcción de los mapas de extensiones y de proposiciones están intrínsecamente relacionadas.

Para la construcción de un mapa de extensiones es necesario establecer, mediante la demostración de proposiciones, todas las relaciones entre los conceptos correspondientes a las extensiones que va formando el mapa. Consecuentemente, se van construyendo de manera simultánea los mapas de extensiones y de proposiciones. Los mapas de extensiones tienen la ventaja de ser más fáciles de recordar que los de proposiciones y que, a partir de ellos pueden construirse los mapas de proposiciones.

Las relaciones entre los conceptos de ciertas clases, por ejemplo, de un concepto y sus generalizaciones, pueden expresarse mediante relaciones y operaciones de la teoría de conjuntos, lo que constituye un *mapa simbólico*. Entre los mapas de extensiones, de proposiciones y simbólicos tiene que existir una total correspondencia, lo cual se justifica por formar ellos parte del mapa conceptual.

Cuando se determina la cardinalidad de todas las extensiones de los conceptos que integran el mapa de extensiones, el conjunto de estas cardinalidades se denomina *mapa de cardinalidades*. Una vez que se ha construido el mapa de cardinalidades, la información que éste brinda permite construir una aproximación mejor del mapa de extensiones.

Los mapas de extensiones forman parte de los instrumentos que mejor propician y facilitan que el aprendizaje sea significativo; ya que por una parte, nuestro conocimiento está conectado o puede conectarse con todos los otros conocimientos con los que guarda relación por medio de conceptos y sus relaciones y, por otra parte, son organizadores excelentes de los contenidos y propician estrategias de elaboración. En consecuencia, contribuyen a que el significado del aprendizaje se aprecie más fácilmente.

La forma del mapa de extensiones depende del concepto de partida (concepto universo) que se tome para describir la organización de una colección de conceptos y está en correspondencia con sus relaciones de inclusión y con las operaciones conjuntista de intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica.

Generalmente un mapa de extensiones comienza con el dibujo de una primera aproximación que refleja la información que se tiene en un determinado momento. Las insuficiencias de ese mapa compulsan a la determinación de más información y al dibujo de una sucesión de mapas que precisen, completen y mejoren la representación de la información que se va agregando. Cada nuevo mapa de esta sucesión constituye una aproximación mejor de la relación real de la colección de extensiones.

Los mapas de extensiones no necesariamente son jerárquicos porque muestran las relaciones exactas entre las extensiones, dos a dos, de los conceptos implicados; es decir, para el trazado del mapa se determina, para dos extensiones E_1 y E_1 cualesquiera, qué relación de las representadas en la figura 1 se presenta.

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ $\qquad\qquad$ $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$

$E_1 = E_2 \qquad E_1 \subset E_2 \qquad E_1 \supset E_2 \qquad E_1 \not\subset E_2 \;\; y \;\; E_2 \not\subset E_1$

Figura 1: Posibles relaciones conjuntistas entre las extensiones de dos conceptos.

Algunas características de los mapas de extensiones, adicionales a las ya señaladas, son las siguientes:

1. Ponen de manifiesto la necesidad de formar nuevos conceptos para eliminar vacíos que aparecen ente los conceptos ya formados.
2. Al integrar un nuevo concepto a un mapa de extensiones que con anterioridad se tiene; se establecen conexiones duraderas entre el nuevo conocimiento y el ya adquirido.
3. Pueden ser usados en todos los niveles de enseñanza; pero son muy necesarios en la enseñanza universitaria donde muchos conceptos tienen extensión infinita.
4. Un mapa de extensiones demanda la caracterización de cada uno de los subconjuntos en que ha quedado dividida la extensión de un concepto subordinante, y el establecimiento de todas las relaciones proposicionales entre todas esta partes.
5. Cuando se trabaja con un conjunto de conceptos cuyas extensiones tienen determinadas estructuras, entonces este conjunto de conceptos puede tener desde el punto de vista conjuntista un mapa de extensiones y, otro distinto con respecto a una estructura diferente.

5. La generalización

La generalización, tanto como operación conceptual, como restringida al proceso de formación conceptual, tiene un doble carácter proceso y resultado. En la lógica, la psicología educativa y la didáctica, la generalización es considerada como uno de los subprocesos del proceso de formación conceptual.

Strogóvich, citado por (Davýdov, 1981, p.47), da la definición de generalización como subproceso del proceso de formación conceptual siguiente:

> “Generalizar es efectuar el tránsito mental desde los indicios aislados y singulares de los objetos hasta los indicios pertenecientes a grupos enteros de dichos objetos.”

Según Chelpanov y Asmus, citados por (Davýdov, 1981, p.47), la palabra generalización se utiliza también para designar el resultado de la generalización como proceso, que se materializa en el concepto ya formado.

En (Gorski y otros, s.f. p. 68) se define:

> ”se llama generalización del concepto a la operación lógica gracias a la cual se amplía la extensión de aquel eliminando todos los caracteres que pertenecen sólo a los objetos que entran en la extensión inicial.”

En (Gorski, 1987, p. 78) se da una definición lógico analítica de la generalización de un concepto:

> ”La generalización de un concepto es una operación lógica que posibilita pasar de conceptos de una clase menor a otros de una clase mayor, al descartar atributos que pertenecen únicamente a los objetos que forman parte del concepto que está siendo generalizado.”

En (Mederos y Roldán, 2010, , pp. 33) se define:

Definición 4.1. Dado un concepto (E_1,C_1), que se ha definido a partir del concepto (E,C), se llama generalización del concepto (E_1,C_1) subordinada a (E,C) a la operación que permite construir, a partir de (E_1,C_1), el concepto (F_1,D_1) con las propiedades:

(p_1) D_1 es un debilitamiento de C_1, ($C_1 \Rightarrow D_1$ pero D_1 no implica C_1),

(p_2) D_1 es más fuerte que C, ($D_1 \Rightarrow C$ pero C no implica D_1),

(p_3) $\varnothing \subset E_1 \subset F_1 \subset E$.

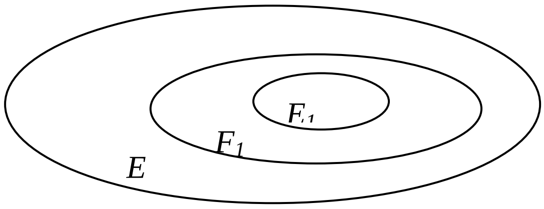


Figura 2: Mapa de las extensiones

El proceso de construcción de (F_1,D_1) a partir de (E_1,C_1) recibe el nombre de *proceso de generalización*; y el concepto (E_1,C_1) se denomina *concepto de partida de la generalización*. Los conceptos (E_1,C_1) y (E,C) son los casos límite del proceso de generalización, que corresponden a la ausencia de generalización y a la generalización absoluta subordinadas a (E,C) respectivamente. Las generalizaciones de los casos límite se denominan *generalizaciones impropias*. En la figura 2 se presenta un mapa de las extensiones E_1, F_1 y E.

5.1. Tipos de tareas didácticas sobre la generalización de conceptos

En el trabajo matemático se pueden presentar distintos tipos de tareas relativas a la generalización de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Dados un concepto (E_1,C_1) y un conjunto de propiedades D_1; determinar si D_1 es más débil que C_1.
2. Dado un concepto (E_1,C_1), obtener un debilitamiento D_1 de C_1.

3. Dado un concepto (E_1, C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir la generalización (F_1, D_1) de (E_1, C_1).
4. Dado un concepto (E_1, C_1), determinar uno o varios criterios de generalización del concepto.
5. Construir las generalizaciones de (E_1, C_1) correspondientes.
6. Construir los mapas de proposiciones, de extensiones, simbólicos y de cardinalidades de un conjunto de generalizaciones de un concepto.

Las tres primeras tareas se utilizaron en Mederos y Roldán (2010) para construir generalizaciones del concepto de métrica. Para dar cumplimiento a una tarea del primer tipo es necesario demostrar que C_1 implica D_1; pero que D_1 no implica C_1. La segunda tarea es de mayor complejidad que la primera, y se presenta cuando se quiere, por ejemplo, obtener un nuevo concepto que generalice algún significado del concepto que se desea generalizar. Cuando se dispone de un debilitamiento D_1 de C_1, la construcción de la generalización es inmediata, y en consecuencia, el cumplimiento de una tarea del tercer tipo.

El cuarto tipo de tarea requiere la realización de un proceso de selección de propiedades con las cuales se puedan construir conjuntos que generen los contenidos de diferentes generalizaciones. Para ello, por lo general hay que demostrar varias proposiciones. Una vez que se ha determinado un criterio de generalización, su aplicación permite dar cumplimiento a una tarea del quinto tipo. La construcción de un mapa de extensiones relativo a un conjunto de generalizaciones de un concepto, cuando se ha cumplido con anterioridad una tarea del tipo 4, por lo general no es una tarea fácil. Si se tiene construido un mapa de extensiones, la construcción de los mapas de proposiciones y simbólico es inmediata. La construcción de un mapa de cardinalidades de las extensiones de los conceptos que intervienen en el mapa de extensiones requiere de la demostración de proposiciones.

En este trabajo se obtienen los debilitamientos D_1 de C_1 quitando una propiedad de C_1. Es por ello que, en una primera aproximación, se considera criterio de generalización a una colección de conjuntos de conjunciones de propiedades del contenido del concepto que se generaliza. En la sección 5.2 se da cumplimiento a tareas de los tipos presentadas en esta sección.

5.2. Generalización del concepto de métrica

Dado un conjunto M, el concepto de función real no negativa con dominio $M \times M$ se indica por F_M. El concepto de métrica se ha definido a partir del concepto F_M, tiene por contenido al conjunto C de propiedades $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, válidas para cualesquiera $x, y, z \in M$ y su extensión se indica por M_M, siendo

m_1) si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$;

m_2) $m(x, y) = m(y, x)$;

m_3) $m(x, y) = m(x, z) + m(z, y)$;

m_4) si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$.

Las colecciones de conjuntos de propiedades $\{F_i^{(1)}\}$, $\{F_{ij}^{(2)}\}$ y $\{F_{ijk}^{(3)}\}$ son criterios de generalización del concepto de métrica, donde $F_i^{(1)} = \{p_i\}$, $p_i = m_j \wedge m_k \wedge m_l$, $j,k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$; $F_{ij}^{(2)} = \{p_{ij}\}$, $p_{ij} = m_k \wedge m_l$, $k,l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$, $i<j$; $F_{ijk}^{(1)} = \{p_{ijk}\}$, $p_{ijk} = m_l$, $l \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j,k\}$, $i<j<k$. A partir de estos criterios se construyen generalizaciones que dejan de satisfacer, como máximo, una, dos o tres propiedades de C, respectivamente.

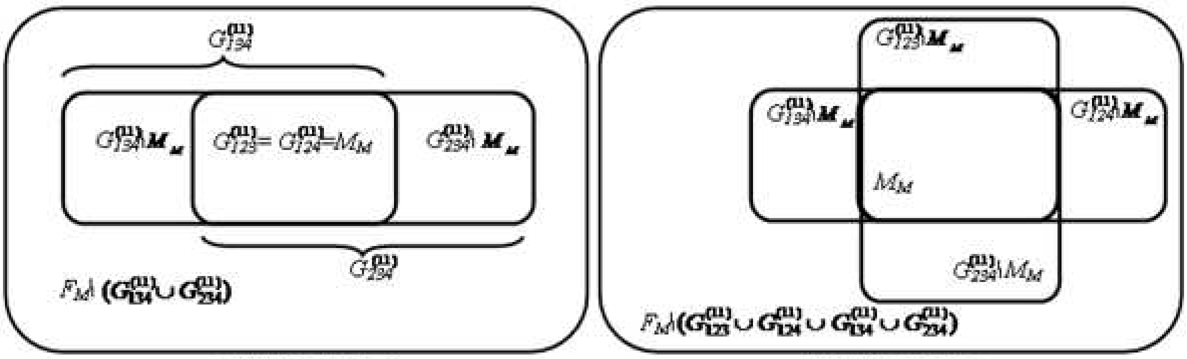
En esta sección se estudian las generalizaciones que se obtienen a partir del criterio $\{F_i^{(1)}\}$ con $i=1:4$, en cinco niveles. Al primer nivel corresponden, como máximo, cuatro generalizaciones. El contenido de estas generalizaciones se indica por $C_{jkl}^{(11)}$, y se define por la igualdad $C_{jkl}^{(11)} = \{p_i\}$, $i=1:4$. La extensión correspondiente se denota por $G_{jkl}^{(11)}$. Las letras de los subíndices de las notaciones de la extensión y del contenido corresponden a índices de las propiedades del contenido del concepto de métrica que se cumplen.

Mederos y Roldán (Mederos y Roldán, 2010, pp. 29-39) determinan y estudian las generalizaciones del primer nivel, a saber, las pseudométricas, quasimétricas, las semimétricas y las métricas sin identidad. Estas generalizaciones las denotan por P_M, Q_M, S_M e I_M, donde

$$G_{123}^{(11)} = P_M,\ G_{124}^{(11)} = S_M,\ G_{134}^{(11)} = Q_M \text{ y } G_{234}^{(11)} = I_M.$$

Se prueba que estas cuatro generalizaciones constituyen nuevos conceptos, si y solo si, el cardinal de M es mayor que 2. En el caso en que el cardinal de M es 2 las generalizaciones S_M y P_M coinciden con el concepto M_M que se generaliza. En este trabajo se construyen, además, los mapas simbólicos, de cardinalidades y de extensiones de las generalizaciones obtenidas.

La figura 3 muestra el mapa de extensiones correspondiente a estas generalizaciones y a continuación se presentan los correspondientes mapas simbólicos y de cardinalidades.



a) CASO: $[M]=2$ b) CASO: $[M]\geq 2$

Fig. 3. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_{ijk}^{(11)}$

MAPAS SIMBÓLICOS

- CASO $[M]=2$:

$$G_{123}^{(11)} = G_{124}^{(11)} = M_M, \qquad G_{234}^{(11)} \cap G_{134}^{(11)} = M_M,$$

$$\emptyset \subset F_M \setminus (G_{234}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)}) \subset F_M,\quad G_{234}^{(11)} \setminus M_M \neq \emptyset,\quad G_{134}^{(11)} \setminus M_M \neq \emptyset.$$

- CASO $[M]>2$:

$$G_{123}^{(11)}\cap G_{124}^{(11)}\cap G_{134}^{(11)}\cap G_{234}^{(11)}=M_M\,,\quad F_M\setminus(G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)})\neq\varnothing\,,$$

$$G_{234}^{(11)}\setminus M_M\neq\varnothing\ ,\ G_{134}^{(11)}\setminus M_M\neq\varnothing\ ,\ G_{123}^{(11)}\setminus M_M\neq\varnothing\ ,\ G_{124}^{(11)}\setminus M_M\neq\varnothing\,.$$

<u>MAPAS DE CARDINALIDADES</u>

- CASO $[M]=2$:

$$[M_M]=[G_{234}^{(11)}\setminus M_M]=[G_{134}^{(11)}\setminus M_M]=[F_M\setminus(G_{234}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)})]=\aleph\,.$$

- CASO $[M]>2$:

$$[M_M]=[G_{234}^{(11)}\setminus M_M]=[G_{134}^{(11)}\setminus M_M]=[G_{123}^{(11)}\setminus M_M]=[G_{124}^{(11)}\setminus M_M]=$$

$$=[F_M\setminus(G_{234}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\cup G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)})]=\begin{cases}\aleph & [M]<\infty\\ 2^C & [M]=c,\ c\ \text{infinito}\end{cases}\,.$$

Las generalizaciones del segundo nivel tienen por contenido disyunciones de dos de las cuatro propiedades que forma los conjuntos del criterio. Se obtienen las 6 generalizaciones que se presentan a continuación

$$(G_{ij}^{(12)},C_{ij}^{(11)})\,,\qquad C_{ij}^{(12)}=\{p_k\vee p_l\}\,,\qquad k,l\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i,j\}\,,\quad i<j,\quad k<l\,.$$

En este nivel, en el caso $[M]=2$, se obtiene una única generalización, como muestra la figura 4a). En la figura 4b) aparece sombreada una de las generalizaciones correspondientes a este nivel (en forma de "L"), las 5 restantes se representan de manera análoga.

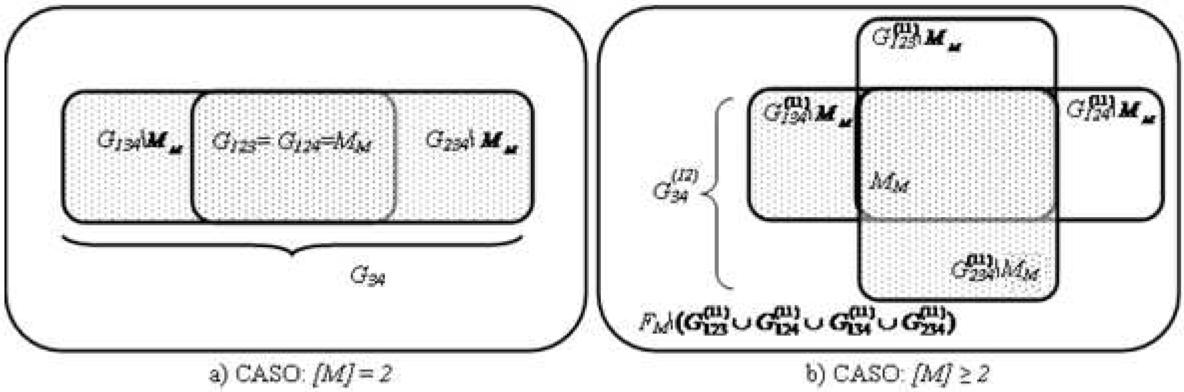


Fig. 4. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_{ii}^{(12)}$

Para este nivel los mapas simbólicos y de cardinalidades del primer nivel se enriquecen con los elementos siguientes:

<u>MAPAS SIMBÓLICOS</u>

- CASO $[M]=2$: $G_{34}^{(12)}=G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}$
- CASO $[M]>2$:

$$G_{12}^{(12)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{124}^{(11)}\,,\quad G_{13}^{(12)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\,,\quad G_{14}^{(12)}=G_{124}^{(11)}\cup G_{134}^{(11)}\,,$$

$$G_{23}^{(12)}=G_{123}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}\,,\quad G_{24}^{(12)}=G_{124}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}\,,\quad G_{34}^{(12)}=G_{134}^{(11)}\cup G_{234}^{(11)}\,.$$

MAPAS DE CARDINALIDADES

- CASO $[M]=2$: $[M_M]=[G_{34}^{(12)} \setminus M_M]=[F_M \setminus G_{34}^{(12)}]=\aleph$.
- CASO $[M]>2$: Para $i<j, \;\; i,j=1:4$.

$$[M_M]=[G_{ij}^{(12)} \setminus M_M]=[F_M \setminus \bigcup \{G_{ij}^{(12)};\; i<j,\, i,j=1:4\}]=\begin{cases} \aleph & [M]<\infty \\ 2^C & [M]=c, \; c \text{ infinito} \end{cases}.$$

En el tercer nivel se obtienen otras cuatro generalizaciones $(G_i^{(13)}, C_i^{(13)})$, tales que $C_i^{(13)}=\{p_j \vee p_k \vee p_l\}$ con $j,k,l \in \{1,2,3,4\}\setminus\{i\}$ y se tiene

$$G_1^{(13)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)}, \qquad G_2^{(13)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)},$$

$$G_3^{(13)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}, \qquad G_4^{(13)}=G_{124}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)}.$$

Con estas relaciones se completa el mapa simbólico de este nivel a partir del nivel anterior en el caso $[M]>2$. En este nivel ya no se obtienen nuevas generalizaciones en el caso $[M]=2$. En la figura 5 aparece sombreada una de las generalizaciones correspondientes a este nivel (en forma de “T”), las 3 restantes se representan de manera análoga.

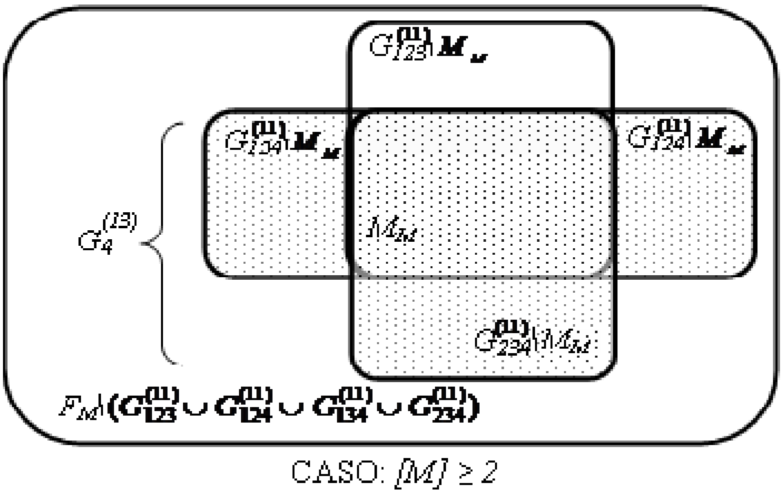


Fig. 5. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_i^{(13)}$

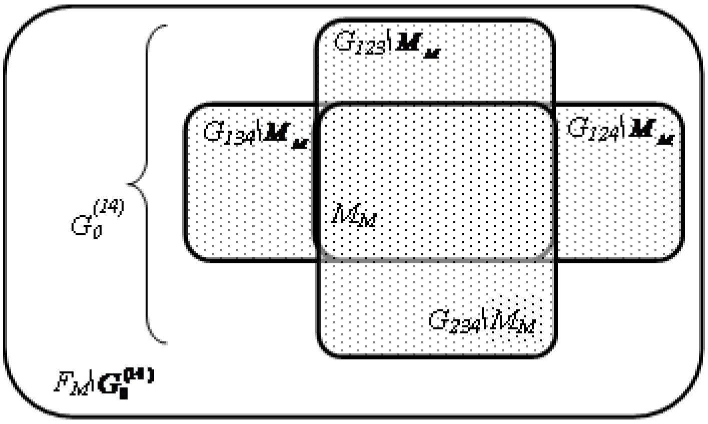
El mapa de cardinalidades de se forma agregando al mapa de cardinalidades del segundo nivel ($[M]>2$) los elementos siguientes ($i=1:4$):

$$[M_M]=[G_i^{(13)} \setminus M_M]=[F_M \setminus \bigcup \{G_i^{(13)};\; i=1:4\}]=\begin{cases} \aleph & [M]<\infty \\ 2^C & [M]=c, \; c \text{ infinito} \end{cases}.$$

El cuarto nivel tiene una sola generalización:

$$(G_0^{(14)}, C_0^{(14)}),\; G_0^{(14)}=G_{123}^{(11)} \cup G_{124}^{(11)} \cup G_{134}^{(11)} \cup G_{234}^{(11)} \text{ y } C_0^{(14)}=\{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4\}.$$

Obsérvese que los elementos de la extensión de cada una de las generalizaciones correspondientes al primer, segundo y tercer nivel, cumplen en común, a lo sumo, tres, dos o una propiedad del concepto de métrica, respectivamente. Los elementos de la generalización del cuarto nivel no cumplen en común propiedad alguna de este concepto. La figura 6 muestra sombreada esta última generalización correspondiente al cuarto nivel (en forma de cruz).



CASO: $[M] \geq 2$

Figura 6. Mapa de las extensiones y sus generalizaciones $G_0^{(14)}$

El mapa de cardinalidades del cuarto nivel ($[M] > 2$) se obtiene agregando al de tercer nivel los elementos siguientes:

$$[M_M] = [G_0^{(14)} \setminus M_M] = [F_M \setminus G_0^{(14)}] = \begin{cases} \aleph & [M] < \infty \\ 2^C & [M] = c,\ c \text{ infinito} \end{cases} .$$

Existe un nivel adicional, que llamaremos el nivel cero, en el que sus elementos satisfacen todas las propiedades del concepto de métrica,

$$(G_{1234}^{(10)}, C_{1234}^{(10)}),\ G_{1234}^{(10)} = M_M \text{ y } C_{1234}^{(10)} = \{m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge m_4\} .$$

La generalización obtenida en este nivel corresponde a la ausencia de generalización, ya que coincide con el concepto que se generaliza, por lo que se denomina *generalización impropia* relativa al criterio utilizado.

En esta sección se construyeron 15 generalizaciones concernientes a los niveles del primero al cuarto. Las extensiones de estas generalizaciones son subconjuntos propios de F_M y contienen como subconjunto propio a M_M, por tal razón reciben el nombre de *generalizaciones propias relativas al criterio* $\{F_i^{(1)}\},\ i = 1:4$. En total se han obtenido 16 generalizaciones del concepto de métrica.

Como se cumple que los cardinales de M_M y de F_M coinciden y son iguales a $2^{[M]}$, entonces todas las generalizaciones concernientes al primer nivel de este criterio también tienen este cardinal.

Estas generalizaciones del concepto de métrica conducen a la definición rigurosa del concepto de criterio de generalización.

Definición 4.2. Dado un concepto (E,C), donde $C=\{m_i\}$, $i\in\{1,2,..,n\}$, y considerando que $\{i_1,i_2,..,i_m\}\subset\{1,2,..,n\}$, $1\le m<n-1$, se denominan *criterios de generalización de* (E,C) a los conjuntos de propiedades

$$\left\{F_{i_1 i_2 \dots i_m} \,\middle|\, F_{i_1 i_2 \dots i_m}=\left\{p_{i_1 i_2 \dots i_m}\right\}\right\},\ p_{i_1 i_2 \dots i_m}=\wedge p_j\,, j\in N_n/\{i_1,i_2\ \dots,i_n\}\ .$$

Para cada criterio existen tantos niveles de generalización como propiedades tiene el criterio, para precisar el concepto de nivel de generalización. Si un criterio tiene k propiedades, entonces al nivel j $(1\le j\le k)$ de ese criterio corresponden las generalizaciones que tienen por contenido un conjunto de una propiedad, formada por la disyunción de j propiedades del criterio.

5.3. Clasificaciones de diferentes generalizaciones

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias clasificaciones, con el objetivo de obtener una o varias particiones de la extensión del concepto que se clasifica, poder realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y obtener una mejor información de la extensión inicial. En esta sección se realizarán clasificaciones de diferentes generalizaciones de las obtenidas en el epígrafe 5.2.

Se utilizan en este trabajo las definiciones de criterio de clasificación y de la operación clasificación de un concepto que se presentan en el artículo escrito por Mederos (2007):

"Dado un concepto (E,C) *y un conjunto de colecciones* P_i *de propiedades de elementos de* E, $P_i=\{p_{ij};\ i\in I,\ j\in J_i\}$, *donde* I *y* J_i *son conjuntos; la colección de propiedades* $P_i=\{p_i;\ p_i=\wedge p_{ij}\}$, *se llama criterio de clasificación de* (E,C) *si, y sólo si, la colección de conceptos* (E_i,C_i), *donde* $C_i=P_i$, $i\in I$, *es tal que* $\{E_i;\ i\in I\}$ *es una partición de* E. *Dado el criterio de clasificación P = {P*$_i$ *: i∈I}, la operación que asocia al concepto* (E,C) *la colección de conceptos* $\{(E_i,C_i)\}$ *se denomina operación de clasificación*, *y la colección de conceptos* $\{(E_i,C_i)\}$ *recibe el nombre de clasificación de* (E,C) *según el criterio* P *."*

En Guillen (2005) se hace un análisis de la clasificación, desde un punto de vista diferente al que se propone en este epígrafe y se presenta una propuesta para abordar la clasificación de los sólidos.

La colección de propiedades $\{P_i;\ i=1:5\}$, donde $P_i=F_i\cup\{m_i\}$ y $P_5=\{m_i\}$, $i=1:4$, determina los cinco conceptos siguientes:

$$(G_{234}^{(11)}\setminus M_M,P_1),\ \ (G_{124}^{(11)}\setminus M_M,P_2),\ \ (G_{134}^{(11)}\setminus M_M,P_3),\ \ (G_{123}^{(11)}\setminus M_M,P_4),\ \ (M_M,P_5).$$

En la tabla 1 se presentan las clasificaciones con sus respectivos criterios de clasificación de conceptos que se forman con una, dos, tres y cuatro generalizaciones del concepto de métrica construidos en 4.2 ($\{i,\ j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$, $i<j<k<l$).

Tabla 1. Clasificación y criterios de clasificación de generalizaciones del concepto de métrica relativas al primer criterio de generalización

Concepto que se clasifica	Clasificación	Criterio de clasificación
$(G_{ijk}^{(11)}, \{p_l\})$	$\{(G_{ijk}^{(11)} \setminus M_M, P_l),\ (M_M, P_5)\}$	$\{P_l, P_5\}$
$(G_{ij}^{(12)}, \{p_k \vee p_l\})$	$\{(G_{ijk}^{(11)} \setminus M_M, P_l),\ \{(G_{ijl}^{(11)} \setminus M_M, P_k),\ (M_M, P_5)\}$	$\{P_k, P_l, P_5\}$
$(G_i^{(13)}, \{p_j \vee p_k \vee p_l\})$	$\{(G_{ijk}^{(11)} \setminus M_M, P_l),\ \{(G_{ijl}^{(11)} \setminus M_M, P_k),\ \{(G_{ikl}^{(11)} \setminus M_M, P_j), (M_M, P_5)\}$	$\{P_j, P_k, P_l, P_5\}$
$(G_0^{(14)}, \{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4\})$	$\{(G_{ijk}^{(11)} \setminus M_M, P_l),\ \{(G_{ijl}^{(11)} \setminus M_M, P_k),\ \{(G_{ikl}^{(11)} \setminus M_M, P_j), (M_M, P_5)\}$	$\{P_j, P_k, P_l, P_5\}$
$(I_M \cup Q_M \cup S_M \cup P_M$, $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4)$	$\{(G_{ijk}^{(11)} \setminus M_M, P_l),\ \{(G_{ijl}^{(11)} \setminus M_M, P_k),\ \{(G_{ikl}^{(11)} \setminus M_M, P_j), \{(G_{jkl}^{(11)} \setminus M_M, P_1), (M_M, P_5)\}$	$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

Todas las clasificaciones de la tabla 1 satisfacen las reglas, tomadas de Mederos (Mederos, 1988), que se exponen a continuación: 1. Se realizan partiendo de un solo criterio, 2. La unión de las extensiones de los conceptos de la clasificación coincide con la extensión del concepto que se clasifica, 3. Las extensiones de los conceptos de la clasificación son disjuntos dos a dos, 4. Son proporcionadas, ya que todas las extensiones de los conceptos de la clasificación tienen la misma cardinalidad,

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la clasificación de conceptos, entre las cuales están las que se exponen en Mederos (Mederos, 2007). A continuación planteamos algunas tareas que es importante realizar para que los estudiantes participen en la determinación de una clasificación a partir de una generalización de un concepto dado.

1. Dado un concepto (E, P_{n+1}), $P_{n+1} = \{p_i;\ i = 1:n\}$ y una generalización de este concepto (F, D), $D = P_{n+1} \setminus \{p_j\}, j = 1:n$. Construir la clasificación de (F, D) correspondiente al criterio $\{P_j, P_{j+1}\}$, donde $P_j = D \cup \{p_j\}$.

2. Dado un concepto (E, P_{n+1}), $P_{n+1} = \{p_i;\ i = 1:n\}$ y una generalización de este concepto (F, D), $D = P_{n+1} \setminus Q$, $Q \subset \{1,..,4\}$ y $1 < [Q] < n$. Construir la clasificación de (F, D) correspondiente al criterio $\{P_j, P_{j+1}\}_{j \in Q}$, donde $P_j = D \cup \{p_j\}_{j \in Q}$.

Determinar la cardinalidad de cada una de las extensiones de los conceptos que forman la clasificación.

6. Consideraciones finales

Se definen y ejemplifican los conceptos de mapas de extensiones, de proposiciones, simbólicos y de cardinalidades de una colección de conceptos. Se presentan 6 mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades de generalizaciones del concepto de métrica.

Se aclaran las diferencias entre la generalización como operación conceptual y la generalización restringida al proceso de formación conceptual, y se establece el doble carácter de proceso y resultado de cada uno de los dos tipos de generalizaciones.

Se define y se aplica el concepto de criterio de generalización de un concepto eliminando propiedades de su contenido. Se aplicó un criterio de generalización al concepto de métrica, formado por cuatro propiedades que son conjunciones de tres de las cuatro propiedades del concepto de métrica.

Se presentan tres nuevos tipos de tareas didácticas que facilitan la construcción de generalizaciones en correspondencia con el primer nivel del criterio $\{F_i^{(1)}\}$.

Se define y aplica el concepto de nivel de generalización correspondiente a un criterio. Se construyeron 15 generalizaciones propias del concepto de métrica correspondientes a cuatro niveles del criterio aplicado.

Se construyen 15 criterios de clasificación y 15 clasificaciones, una para cada una de las 15 generalizaciones del concepto de métrica construidas en la sección 4,2.

Se presentan dos nuevos tipos de tareas didácticas que facilitan la construcción de clasificaciones de generalizaciones en correspondencia con el primer nivel del criterio $\{F_i^{(1)}\}$.

Bibliografia

Armbruster, B. y Anderson, T. (1984). *Mapping: representing informative text diagrammatically*. En C. Holley y F. Danserau, Spatial learning strategies, Academic Press, Orlando

Asmus, V. (1947). *Lógica*. Gospolitizdat, Moscú.

Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Editorial Síntesis, S.A., Madrid.

Brinkmann, A. (2003). *Mind mapping as a tool in mathematics education*. En *Mathematics Teacher*, 96(2), 96-101.

Chelpanov, G. (1946). *Manual de lógica*. Gospolitizdat, Moscú.

Davýdov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Gorski, D. y otros (Sin fecha). *Lógica*. Imprenta Nacional de Cuba, La Habana.

Gorski, D. (1987). *Generalización y cognición*. Progress Publishers, Moscow.

Guillén, S. (2005). *Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. En Educación Matemática 17, 002*, 117-152. México DF.

Hernández, F. (1990). *Aprendiendo a aprender. Métodos y técnicas de estudio para alumnos de EGB, Bachillerato y Formación Profesional.* Distribuidor Editorial, Madrid.

Huang, J. (1988). *Assesing knowledge structure*. Umpublish Doctoral Dissertation. Universidad de Illinois. Urbana-Champaign, Illinois.

Jones, B. F. y otros (1987). *Strategic. Teaching and Learning: Cognitive Instruction in the Content Areas*. *En Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.* Virginia.

Mc Allese, R. (1988). *From concept maps to computer-aided instruction: Is it possible using notecard? En American Educational Research Association. 88, 1-24*.

Mederos, O. B. y Roldán, R. A. (2010). *Caracterizaciones y generalizaciones del concepto de métrica. En Revista Ciencias Matemáticas. Cuba. Volumen, 25, único,* 2009-2010 29-39

Mederos, O. B. y J. Mederos, B. J. (2009). *Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 257-266, México.

Mederos, M. O. y Ruiz, A. M. (2007): *Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexo. En Revista "NUMEROS"*. 67, 36-44.

Mederos, O. B. y Martínez, M. A. (1988): *Clasificación de las funciones elementales. En Revista Cubana de Educación Superior. VIII*, 3. 22-31.

Novak, J. D. (2006**).** Del origen de los mapas conceptuales al desarrollo de CmapTools. Recuperado el 15/10/2011, de www.eduteka.org/Entrevista22.php.

Pérez, L. F. (1990). *Proyecto Docente*. Universidad Complutense, Madrid:

Steen, L. y Seebach, J. (1995). *Counterexamples in Topology*. Holt, Reinehart and Winston Inc., New York.

Strogóvich, M. (1949). *Lógica.* Gospolitizdat. Moscú.

Yussen. S. R. (1974). *Determinants of visual attention and recall in observational learning by preschoolers and second graders. En Developmental Psychology* 10, 93-100.

Otilio Bienvenido Mederos Anoceto. Nació en Santa Clara, Villa Clara, Cuba, el 22 de febrero de 1945. Obtuvo su doctorado en Ciencias Físico Matemáticas en la Universidad Estatal de Odessa, República de Ucrania. Actualmente trabaja en la Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México. Sus publicaciones en la última década las ha realizado en el área de Matemática Educativa.

Rita Alejandra Roldán Inguanzo. Nació en La Habana, Cuba, el 24 de abril de 1962. Obtuvo su doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad "Friedrich Schiller" de Jena, Alemania. Actualmente trabaja en la Universidad de La Habana, Cuba. Sus publicaciones en la última década las ha realizado en las áreas de Matemática Educativa, Divulgación de la Matemática y Análisis Funcional. **rroldancu@yahoo.es**